

آونگ پیچشی

هدف آزمایش

۱. آشنایی با آونگ پیچشی
۲. محاسبه ی اینرسی دورانی اجسام صلب
۳. بستگی اینرسی دورانی به توزیع جرم در جسم
۴. بررسی قضیه ی محورهای موازی

وسایل مورد نیاز

آونگ پیچشی ، زمان سنج ، نیرو سنج ، متر نواری ، استوانه ی توپر ، استوانه های توخالی ، کره ی توپر ، میله و وزنه های مخصوص

تئوری آزمایش

(۱) آونگ پیچشی

آونگ پیچشی ، آونگی است که در اثر اعمال گشتاور نیروی τ تا به اندازه ی زاویه ی θ انحراف زاویه ای پیدا می کند . این گشتاور نیرو با انحراف زاویه ی θ متناسب است و داریم :

$$\tau = k\theta \quad (۱)$$

که در آن k ثابتی است که به میزان سختی آونگ بستگی دارد .

هنگامی که با وارد نمودن گشتاور نیرو به آونگ پیچشی آن را از حالت تعادل دور کرده ، رها کنیم ، آونگ به دلیل گشتاور نیروی بازدارنده به حالت تعادل نزدیک می شود ولی بدلیل وجود انرژی دورانی ، حرکت آن ادامه می یابد . یعنی این بار تغییر زاویه ی آونگ در جهت مخالف صورت می گیرد و به این ترتیب حرکت فوق دائماً تکرار می شود . هر حرکتی را که در زمانهای مساوی تکرار شود حرکت تناوبی و زمان یک دور کامل حرکت را زمان تناوب آن می گویند . آونگ پیچشی در شکل ۱ نشان داده شده است .



شکل ۱

رابطه ی ۱ مشابه رابطه ی $F = kx$ برای فنر معمولی است . اگر شتاب زاویه ای حرکت تناوبی در هر لحظه متناسب و در خلاف جهت انحراف زاویه ای θ باشد حرکت تناوبی را حرکت نوسانی ساده می خوانند . مشابه قانون دوم نیوتن در حرکت خطی ($F = ma$) گشتاور نیرو در حرکت دورانی با شتاب زاویه ای متناسب است و داریم :

$$\tau = I\alpha \quad (۲)$$

که در آن I اینرسی دورانی جسم نامیده می شود و همان نقشی را که جرم در حرکت انتقالی دارد، I در حرکت دورانی ایفا می کند . از سینماتیک دورانی داریم:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (۳)$$

با جایگذاری رابطه ی ۳ در رابطه ی ۲ خواهیم داشت :

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (۴)$$

اگر اینرسی دورانی جسم متصل به فنر I باشد ، تمام گشتاور نیروی بازگرداننده سبب انحراف زاویه ای جسم می شود . یعنی:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0 \quad (۵)$$

و یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{I}\theta = 0 \quad (۶)$$

این معادله دیفرانسیل را معادله حرکت آونگ پیچشی می نامند . با تغییر $k/I = \omega^2$ خواهیم داشت :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (7)$$

یکی از جوابهای معادله دیفرانسیل فوق عبارت است از :

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

A را دامنه نوسان ، ω را سرعت زاویه ای و φ_0 را فاز حرکت در لحظه ی شروع می نامند . زمان تناوب حرکت آونگ پیچشی از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (9)$$

(۲) اینرسی دورانی

فرض کنید جسم صلبی با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور ثابتی دوران کند . هر ذره ی این جسم در حال دوران مقدار معینی انرژی جنبشی دارد . یک ذره به جرم m که در فاصله ی r از محور دوران قرار دارد بر روی دایره ای به شعاع r با سرعت زاویه ای ω حول این محور دوران می کند و دارای سرعت خطی $v = r\omega$ است. بنابراین انرژی جنبشی این ذره برابر $(1/2)m(r\omega^2)$ است . اگر جسم صلب باشد ω که برای تمام ذرات جسم یکسان خواهد بود ولی شعاع r ممکن است برای ذرات مختلف متفاوت باشد . به این ترتیب انرژی جنبشی جسم برابر با مجموع انرژی جنبشی ذرات تشکیل دهنده ی جسم است . به بیان ریاضی

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum_i m_i r_i^2) \omega^2 \quad (10)$$

که در آن m_i معرف ذرات تشکیل دهنده ی جسم و r_i فاصله ی هر ذره تا محور دوران است . رابطه ی بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت :

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (11)$$

این رابطه ، مشابه رابطه ی $E_k = \left(\frac{1}{2}\right) m v^2$ در حرکت انتقالی است . در این رابطه I اینرسی دورانی جسم نسبت به محور دوران مورد نظر نامیده می شود و برابر است با :

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (12)$$

اینرسی دورانی یک جسم نمایانگر مقاومت یک جسم در مقابل تغییر حرکت دورانی حول یک محور معین می باشد و همان نقشی را در حرکت دورانی ایفا می کند که جرم در حرکت انتقالی. بنابراین اینرسی دورانی هر جسم به محور دوران خاصی که حول آن می چرخد و نیز به شکل و نحوه ی توزیع جرم جسم بستگی دارد. به عنوان مثال اینرسی دورانی یک استوانه ی توپر حول محور تقارن آن از اینرسی دورانی یک دیسک هم جرم با آن کوچکتر است. زیرا کمیت r برای ذرات تشکیل دهنده ی استوانه کوچکتر از دیسک است. اینرسی دورانی چند جسم در پایین آورده شده است.

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad (۱۳)$$

کره توپر به شعاع R

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (۱۴)$$

استوانه توپر به شعاع R حول محور استوانه

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (۱۵)$$

دیسک به شعاع R حول محور دیسک

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \quad (۱۶)$$

میله به طول L حول محور عمود بر مرکز میله

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \quad (۱۷)$$

استوانه توخالی به شعاع های داخلی و خارجی R_1, R_2 حول محور استوانه

۳) قضیه ی محورهای موازی

فرض کنید اینرسی دورانی یک جسم حول محوری که از مرکز جرم آن می گذرد I_{cm} و اینرسی دورانی آن حول محوری که به موازات محور اول و در فاصله ی h از مرکز جرم جسم قرار گرفته است I باشد. اگر جرم کل جسم M باشد می توان نوشت:

$$I = I_{cm} + Mh^2 \quad (۱۸)$$

این رابطه به قضیه ی محورهای موازی معروف است . اثبات این رابطه ساده است و می توان آن را در هر کتاب درسی فیزیک مکانیک یافت .

روش آزمایش

(۱) محاسبه ضریب سختی آونگ پیچشی

برای محاسبه ی ضریب سختی آونگ ، پیچشی مطابق شکل ۲ میله را به صورت متقارن روی محور فنر پیچشی نصب کنید . نیروسنجی را روی میله در نقطه ای ثابت کرده و آن را کاملاً عمود بر میله نگهدارید . فاصله ی نقطه ی مورد نظر را تا محور دوران اندازه بگیرید و بر حسب متر یادداشت کنید. حال به کمک نیروسنج نیرویی به آونگ پیچشی وارد کرده و آن را به اندازه ی زاویه ی ۳۰ درجه بپیچانید . اندازه ی نیرو را از روی نیروسنج بخوانید و در جدول ۱ گزارش کار یادداشت نمایید . همین عمل را برای زوایای ۲۰ و ۵۰ و ... و ۱۱۰ تکرار کنید و نتایج خود را در جدول ۱ یادداشت نمایید . واحد گشتاور نیرو، نیوتن متر است و واحد ضریب سختی نیوتن متر بر درجه است.

۱۱۰	۱۰۰	۹۰	۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	زاویه انحراف (درجه)
									زاویه انحراف (رادیان)
									نیرو (نیوتن)
									گشتاور نیرو
									k ضریب سختی
									$\bar{k}$ میانگین ضریب سختی

جدول ۱

(۲) محاسبه اینرسی دورانی اجسام صلب

جرم و طول میله را اندازه گرفته و آن را به فنر پیچشی متصل کنید . جرم را بر حسب کیلو گرم و طول را بر حسب متر یادداشت کنید. در این حالت یک آونگ های پیچشی ساخته اید . زمان سنج را برای شمارش ۵ نوسان آماده کنید . آونگ را از حالت تعادل خارج کرده و آن را رها کنید .

درست موقع رها کردن آونگ ، زمان سنج را به کار اندازید و زمان ۵ نوسان آونگ پیچشی را اندازه بگیرید و در جدول ۲ گزارش کار یادداشت نمایید . زمان تناوب آونگ را محاسبه کنید و در جدول ۲ یادداشت نمایید . با استفاده از رابطه ی ۹ اینرسی دورانی آن را به دست آورید . اینرسی دورانی میله را به طور تئوری با استفاده از رابطه ی ۱۶ به دست آورده و در جدول ۲ بنویسید . همین آزمایش را برای کره ی توپر ، استوانه ی توپر ، دیسک و استوله ی توخالی تکرار کنید و در جدول ۲ یادداشت نمایید .

شکل هندسی	جرم جسم (kg)	اندازه هندسی (m)	زمان ۵ نوسان (s)	$T(s)$	I تجربی (kgm^2)	I تئوری (kgm^2)
میله						
کره تو پر						
استوانه تو پر						
دیسک						
استوانه تو خالی						

جدول ۲

(۳) بستگی اینرسی دورانی به توزیع جرم در جسم

همانطور که گفته شد اینرسی دورانی نه تنها به جرم جسم بلکه به نحوه ی توزیع جرم جسم حول محور دوران نیز بستگی دارد . اگر اینرسی دورانی یک جسم حول محوری که از مرکز جرم آن می گذرد I باشد ، با جابجا کردن بخشهای مختلف جسم ، اینرسی دورانی آن حول همان محور تغییر می کند . برای بررسی این موضوع یک مجموعه ی سه جسمی در نظر می گیریم و با اتصال این مجموعه به فنر پیچشی یک آونگ پیچشی می سازیم . این مجموعه ی سه جسمی شامل یک میله ی باریک به طول L و جرم M و دو جسم کوچک m_1 و m_2 است. در این آزمایش ابتدا میله را به فنر پیچشی متصل کرده و با سنجش زمان تناوب اینرسی دورانی آن را حول محوری که از مرکز میله می گذرد و به میله عمود است محاسبه کنید و آن را I بنامید . جرم وزنه های m_1 و m_2 را با ترازو اندازه گیری کنید . سپس وزنه های m_1 و m_2 را به صورت متقارن به فاصله معینی از محور دوران (d) بر روی میله قرار دهید . اینرسی دورانی این مجموعه برابر است با :

$$I_{tot} = I + m_1 d^2 + m_2 d^2 \quad (19)$$

که در آن I_{tot} اینرسی دورانی مجموعه ی میله و وزنه ها است .

زمان سنج را برای شمارش ۵ نوسان آماده کنید . آونگ را از حال تعادل منحرف ساخته و رها کنید . درست موقع رها کردن آونگ زمان سنج را به کار اندازید و زمان ۵ نوسان آونگ پیچشی را اندازه بگیرید و در جدول ۳ گزارش کار یادداشت نمایید . زمان تناوب را محاسبه کرده و در جدول ۳ یادداشت نمایید . این آزمایش را برای چند فاصله ی دیگر وزنه ها از محور دوران تکرار کرده و در جدول ۳ یادداشت نمایید .

					فاصله وزنه تا محور دوران $d(m)$
					$d^2(m^2)$
					زمان ۵ نوسان (s)
					زمان تناوب (s)
					اینرسی دورانی

جدول ۳

(۳) بررسی قضیه ی محورهای موازی

دیسکی به جرم M و شعاع R را از مرکز جرم آن به فنر پیچشی متصل کنید . این آونگ پیچشی (دیسک و فنر) را از حالت تعادل منحرف ساخته و رها کنید . پیش از رها کردن آونگ ، زمان سنج را برای اندازه گیری ۵ زمان تناوب آماده کنید و به محض رها کردن آن را به کار اندازید . با اندازه گیری زمان ۵ نوسان ، زمان تناوب را اندازه گیری کرده و در جدول ۴ گزارش کار بنویسید . اینرسی دورانی آن را از رابطه ۹ به دست آورده و در جدول ۴ یادداشت نمایید .

سپس دیسک را از نقطه ی دیگری روی صفحه که به فاصله ی ۵ سانتی متری از مرکز جرم صفحه قرار گرفته است به فنر پیچشی متصل کنید و همین آزمایش را تکرار کنید و نتایج را در جدول ۴ یادداشت کنید . این آزمایش را برای فواصل ۱۰ و ۱۵ و ... و ۳۰ سانتی متری تکرار کنید و در جدول ۴ یادداشت نمایید .

h	مرکز جرم	$5(cm)$	$10(cm)$	$15(cm)$	$20(cm)$	$25(cm)$	$30(cm)$
h^2							
زمان ۵ نوسان							
زمان تناوب							
I							

جدول ۴

محاسبات ، بررسی نتایج ، پرسشها

۱. در آزمایش ۱ فاصله ی نقطه اثر نیرو تا محور دوران را بنویسید .
۲. با استفاده از مقادیر جدول ۱ نمودار گشتاور نیرو بر حسب زاویه ی انحراف را بر روی کاغذ میلی متری رسم کنید .
۳. شیب نمودار فوق تعیین کرده و از آنجا ضریب سختی آونگ پیچشی را تعیین کنید .
۴. با استفاده از مقادیر جدول ۲ درصد خطای نسبی را برای اینرسی دورانی اجسام مختلف به دست آورید .
۵. با استفاده از مقادیر جدول ۲ نمودار مربع زمان تناوب جسم و فنر (آونگ پیچشی) را بر حسب اینرسی دورانی جسم برای اجسام مختلف روی کاغذ میلی متری رسم کنید .
۶. با استفاده از نمودار فوق ضریب سختی فنر پیچشی را یک بار دیگر محاسبه کنید .
۷. آیا مقادیر به دست آمده برای ضریب سختی فنر پیچشی که از سئولات ۳ و ۶ به دست آورده اید متفاوتند ؟
۸. علت تفاوت را توجیه کنید . کدام روش برای تعیین ضریب سختی فنر دقیق تر است ؟
۹. خطای مطلق را در تعیین ضریب سختی فنر به دست آورید .
۱۰. در آزمایش ۳ جرم وزنه های m_1 و m_2 را بنویسید .
۱۱. نمودار اینرسی دورانی را بر حسب مربع فاصله ی وزنه ها تا محور دوران بر روی کاغذ میلی متری رسم کنید .
۱۲. با استفاده از نمودار فوق مجموع جرم وزنه ها $m_1 + m_2$ را تعیین کنید .
۱۳. آیا جرم به دست آمده از سئوال بالا با مقداری که به طور مستقیم در سئوال ۱۰ اندازه گرفتید برابر است ؟

۱۴. با استفاده از نمودار سؤال ۱۱ اینرسی دورانی میله را به دست آورید و آن را با مقداری که به طریق تئوری در جدول ۲ به دست آوردید مقایسه کنید .
۱۵. در آزمایش ۴ نمودار اینرسی دورانی آونگ پیچشی را بر حسب مربع فاصله ی مرکز جرم دیسک تا محور دوران (h^2) رسم کنید .
۱۶. با استفاده از سؤال ۱۵ جرم دیسک را به دست آورید . آیا جرم دیسک با مقدار اندازه گیری شده توسط ترازو فرق دارد ؟
۱۷. با استفاده از نمودار آزمایش ۴ اینرسی دورانی دیسک را حول مرکز جرم آن به دست آورید .
۱۸. اینرسی دورانی به دست آمده از سؤال ۱۷ را با مقادیر تجربی و تئوری جدول ۲ برای دیسک مقایسه کنید .

