

آزمایش شماره ۱۱

آونگ کاتر (فیزیکی)

هدف آزمایش

۱. مطالعه مشخصات آونگ دو طرفه (کاتر)

۲. اندازه گیری شتاب جاذبه زمین

وسایل مورد نیاز

آونگ کاتر ، زمان سنج ، خط کش یا متر نواری

تئوری آزمایش

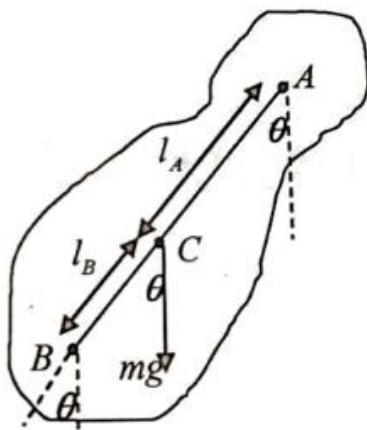
آونگ کاتر

آونگ ساده متشکل از یک گلوله ی مادی است که توسط نخ بدون وزنی از یک محور افقی آویزان شده است و می تواند حول آن محور در صفحه قائم نوسان کند . در این آونگ فرض می شود که از جرم نخ در مقابل جرم گلوله می توان صرف نظر کرد . به علاوه ابعاد گلوله در مقابل طول نخ بسیار ناچیز است . زمان تناوب نوسانات کم دامنه آونگ ساده از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (۱)$$

که L طول نخ و g شتاب جاذبه ی زمین است . با اندازه گیری زمان تناوب و طول آونگ ساده می توان از رابطه ی ۱ شتاب جاذبه را حساب کرد . در عمل به دلیل آنکه گلوله ی آونگ یک نقطه ی مادی نیست و نیز به دلیل آنکه نخ دارای جرم است و نقطه ی تعلیق آونگ نمی تواند دقیقاً مشخص شود ، مقدار شتاب جاذبه ی به دست آمده از رابطه ی ۱ با خطا همراه است . برای تعیین دقیق g می توان از یک آونگ کاتر استفاده کرد .

آونگ کاتر آونگ مرکبی است که از یک میله با دو وزنه با جرمهای نامساوی ساخته شده است که می تواند حول دو نقطه ی آویز نوسان کند . در شکل ۱ آونگ کاتری نشان داده شده است که می تواند حول محور عمود بر صفحه شکل در نقطه ی A نوسان کند. نقطه ی A به فاصله ی l_A از مرکز جرم cm جسم (نقطه ی C) قرار دارد .



شکل ۱

اگر آونگ را به اندازه ی زاویه θ از وضعیت تعادل منحرف کرده و سپس رها سازیم گشتاور نیروی بازگرداننده برابر است با :

$$\tau = -mgl_A \sin \theta \quad (۲)$$

که در آن m جرم آونگ است . بر طبق قانون دوم نیوتن در حرکت دورانی داریم :

$$\tau = I_A \alpha = I_A \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (۳)$$

که در آن اینرسی دورانی جسم صلب حول نقطه ی A است . از مقایسه ی روابط ۲ و ۳ خواهیم دید:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgl_A}{I_A} \sin \theta \quad (۴)$$

با تقریب برای نوسان های کوچک ($\theta \leq 6^\circ$) داریم :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgl_A}{I_A} \theta \quad (۵)$$

و در نتیجه می توان نوشت :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (۶)$$

که در آن ω بسامد زاویه ای نوسان آونگ است و برابر است با :

$$\omega = \frac{mgl_A}{I_A} \quad (7)$$

بنابر این زمان تناوب آونگ کاتر برابر است با :

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgl_A}} \quad (8)$$

از مقایسه با زمان تناوب آونگ ساده (رابطه ی ۱) آونگ فیزیکی را می توان معادل آونگ ساده ای به جرم m و طول L_A دانست که :

$$L_A = \frac{I_A}{ml_A} \quad (8)$$

به عبارت دیگر آونگ ساده ای با طول کاهش یافته I_A/ml_A دقیقاً همان زمان تناوبی را دارد که آونگ کاتر دارد. اگر خط AC را که فاصله ی آن تا A برابر l_A است، رسم کرده امتداد دهیم نقطه ی B را خواهیم یافت که آن را مرکز نوسان نسبت به محور نوسان A می نامند. اگر تمام جرم آونگ کاتر را در این نقطه متمرکز کنیم زمان تناوب آونگ تغییر نمی کند .

اگر از قضیه محورهای موازی استفاده کنیم اینرسی دورانی جسم حول محوری که از نقطه ی A می گذرد را می توان بر حسب اینرسی دورانی آن حول محور موازی که از مرکز جرم دستگاه می گذرد نوشت :

$$I_A = I_C + ml_A^2 \quad (10)$$

که در آن I_C اینرسی دورانی جسم حول محوری است موازی محور نوسان که از مرکز جرم دستگاه می گذرد و ml_A^2 در واقع اینرسی دورانی مرکز جرم حول محور نوسان است . با جایگذاری رابطه ی ۱۰ در رابطه ی ۸ خواهیم داشت :

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + ml_A^2}{mgl_A}} \quad (11)$$

و یا

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + l_A^2}{gl_A}} \quad (12)$$

که در آن k شعاع چرخش حول مرکز جرم است و برابر است با :

$$k = \sqrt{\frac{I_C}{m}} \quad (۱۳)$$

هویگنس نشان داد محور دیگری به موازات محور نوسان A در طرف دیگر مرکز جرم وجود دارد که تناوب آونگ حول این محور دورانی جدید B نیز برابر T است . در این صورت از قضیه محورها می توان نشان داد که محل جدید نقطه ی آویز در رابطه ی زیر صدق می کند:

$$I_C = ml_A l_B \quad (۱۴)$$

که در آن l_B فاصله ی نقطه ی B تا مرکز جرم و I_C اینرسی دورانی حول مرکز جرم است . در این حالت اگر A محور نوسان و B مرکز نوسان باشد طول آونگ ساده از رابطه ی ۹ و اگر B محور نوسان و A مرکز نوسان باشد طول کاهش یافته ی آونگ ساده از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$L_B = \frac{I_B}{ml_B} \quad (۱۵)$$

که در آن

$$I_B = I_C + ml_B^2 \quad (۱۶)$$

با جایگذاری رابطه ی ۱۰ در رابطه ی ۹ و رابطه ی ۱۵ در رابطه ی ۱۴ خواهیم داشت :

$$L_A = \frac{I_C}{ml_A} + l_A \quad (۱۷)$$

$$L_B = \frac{I_C}{ml_B} + l_B \quad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه ی ۱۴ در روابط ۱۷ و ۱۸ خواهیم داشت :

$$L_A = L_B = l_A + l_B \quad (۱۹)$$

همچنین اگر آونگ کاتر از مرکز نوسان B آویزان شود زمان تناوب آن برابر است :

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + l_B^2}{gl_B}} \quad (۲۰)$$

می توان نشان داد :

$$T_A = T_B = T \quad (21)$$

بنابراین اگر آونگ کاتری از مرکز نوسان آن نسبت به محور نوسان آویزان شود همان زمان تناوبی را خواهد داشت که در حالت قبل دارا بود. به عبارت دیگر در آونگ کاتر و در طرفین مرکز جرم آن، دو نقطه یافت می شود که زمان تناوب نوسان آونگ حول آن دو نقطه با هم برابر است. به همین دلیل به آن آونگ دو طرفه نیز گفته می شود. به علاوه، فاصله ی آن دو نقطه برابر با طول آونگ ساده ی همزمان با آن است. این موضوع اولین بار توسط کاتر در سال ۱۸۱۸ میلادی نشان داده شد و به همین دلیل به آن آونگ کاتر می گویند.

برای یافتن طول آونگ ساده ی متناظر با آونگ کاتر می توان آونگ را حول دو محور ثابت به نوسان درآورد. در حالی که مرکز جرم آونگ قابل تغییر است. با تغییر مناسب مرکز جرم کاری می کنیم که زمان تناوب حول دو محور یکسان شود. فاصله ی دو محور همان طول آونگ ساده ی معادل است که می توان آن را اندازه گیری کرد و از آنجا شتاب جاذبه را محاسبه نمود.

به علاوه اگر فاصله ی محورها تا مرکز جرم آونگ به ترتیب l_A و l_B باشد با محاسبه ی زمان تناوب متناظر T_A و T_B می توان با حذف k^2 بین روابط ۱۲ و ۲۰، شتاب جاذبه را به صورت زیر به دست آورد:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_A + l_B}{g}} \quad (22)$$

$$g = 4\pi^2 \left(\frac{l_A + l_B}{T^2} \right) \quad (23)$$

از آنجایی که l_A و l_B به ترتیب فاصله ی نقطه آویز A و B تا مرکز جرم هستند، مجموع این دو مقدار همواره برابر با فاصله ی نقاط A و B از یکدیگر است و برای هر آونگ کاتری یک مقدار مشخص است.

در آونگ کاتری که در آزمایشگاه ما موجود است، فاصله بین نقاط آویز A و B برابر یک متر است، بنابراین در رابطه ی ۲۳ به جای مجموع $l_A + l_B$ ، عدد ۱ را قرار می دهیم.

وسیله ی آزمایش:

آونگ کاتر که در شکل ۲ نشان داده شده است شامل میله ای به طول ۶۷/۱ متر است که بر روی آن دو تیغه ی ثابت با فاصله ی ۱ متر برای نوسان آونگ تعبیه شده است ($l_A + l_B = 1m$). به علاوه بر روی میله دو وزنه سوار هستند که می توانند در امتداد میله لغزانده شوند و یا با محکم کردن پیچ آنها در محل ثابت بمانند. یکی از وزنه ها، A که جرم آن ۱ کیلو گرم است در خارج تیغه ها، و دیگری B که جرم آن ۱/۴ کیلو گرم است در بین دو تیغه قرار دارد. دستگاه همچنین شامل یک میله اتکا است که بر روی پایه ای با پیچهای

تراز کننده محکم شده است . تیغه های آونگ درون شیار میله ی اتکا قرار می گیرند و آونگ حول تیغه ها به نوسان در می آید .



شکل ۲

برای کار با آونگ فوق وزنه ی کوچکتر را که در خارج دو تیغه قرار گرفته است ، در محل خود محکم می کنیم و برای مکانهای مختلف وزنه ی B در فاصله ی بین تیغه ها، در هر بار زمانهای تناوب را حول دو تیغه اندازه می گیریم .

اگر بخواهیم دقیق عمل کنیم باید بر روی یک صفحه ی کاغذ منحنیهای زمان تناوب حول دو تیغه را بر حسب فاصله های بین وزنه های A و B رسم کنیم. هر جا که دو نمودار یکدیگر را قطع کنند ، نقطه ی تقاطع ، زمان تناوب مشترک و نیز محل وزنه ی متحرک برای مساوی شدن زمانهای تناوب را نشان می دهد . در این صورت با به کار بردن زمان تناوب مشترک و نیز فاصله ی تیغه ها از رابطه ی ۲۳ شتاب جاذبه تعیین می شود. در غیر این صورت اگر نمودارها یکدیگر را قطع نکردند محل وزنه را تغییر داده آزمایش را تکرار می کنیم و این عمل را تا آنجا ادامه می دهیم که نمودارهای زمان تناوب یکدیگر را قطع کنند .

روش آزمایش

برای انجام آزمایش ابتدا با استفاده از پیچهای تنظیم پایه ی آونگ ، ستون آونگ را در راستای قائم قرار دهید .
(قائم بودن ستون آونگ را با راستای شاقول توسط یک تراز آبی یا هر وسیله ی مشابه دیگر کنترل کنید).
وزنه ی کوچکتر A را در فاصله ی ۱۰ سانتی متری از تیغه A و در خارج از دو تیغه محکم کنید . (فاصله ها را تا مرکز وزنه در نظر بگیرید .) وزنه ی بزرگتر B را مطابق جدول ۱ در فاصله های داده شده نسبت به مرکز جرم وزنه A قرار دهید. در هر مرحله زمان ده نوسان را حول تیغه A اندازه گیری کرده و در جدول (۱) یادداشت کنید. حال آونگ را برگردانده و آن را از تیغه B آویزان کنید . مجدداً زمان ده نوسان را برای هر کدام از فاصله های داده شده در جدول ۱ اندازه گرفته و آن را یادداشت کنید . سپس زمان تناوب آونگ کاتر را حول هر دو تیغه به دست آورده و جدول ۱ را کامل کنید .

فاصله ی مرکز جرم دو وزنه ی A و B (cm)	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
زمان ده نوسان حول تیغه A							
زمان ده نوسان حول تیغه B							
زمان تناوب حول تیغه A (T_A)							
زمان تناوب حول تیغه B (T_B)							
$ T_A - T_B $							

جدول ۱

اگر زمانهای نوسان حول دو تیغه در یکی از مکانهای وزنه ی متحرک B با هم برابر شد، با استفاده از رابطه ی ۲۳ شتاب جاذبه را حساب می کنیم در غیر این صورت از جفت زمانهای تناوبی که به هم نزدیکترند میانگین می گیریم . سپس این زمان تناوب میانگین را در رابطه ی ۲۳ قرار داده و از آنجا شتاب جاذبه را تعیین می کنیم .

محاسبات ، بررسی نتایج ، پرسشها

۱. یک دستگاه مختصات زمان بر حسب فاصله (d) روی کاغذ میلیمتری رسم کنید و با استفاده از جدول ۱ ، دو نمودار زمان تناوب حول دو تیغه (T_A و T_B) بر حسب d را کنار هم در این برگه رسم کنید ، جوری که نقطه ی قطع شدن نمودارها توسط یکدیگر ، یا نقطه ی نزدیک شدن آنها به هم ، به وضوح دیده شود .
۲. زمان تناوب مشترک را از روی دو نمودار به دست آورید .
۳. با استفاده از این زمان تناوب ، شتاب جاذبه ی زمین را با استفاده از رابطه ی ۲۳ تعیین کنید .
۴. با توجه به اینکه شتاب جاذبه ی زمین در این مکان (همدان) برابر ۹,۷۸ متر بر مجذور ثانیه است در صد خطای آزمایش را محاسبه نمایید .
۵. دلایل خطای آزمایش را ذکر کنید .

دانشگاه بوعلی سینا