

آونگ مرکب

هدف آزمایش

۱. آشنایی با آونگ مرکب
۲. بستگی زمان تناوب آونگ مرکب به اینرسی دورانی
۳. بستگی زمان تناوب آونگ مرکب به فاصله ی مرکز جرم آونگ از نقطه ی آویز
۴. تعیین شتاب جاذبه ی زمین

وسایل مورد نیاز

آونگ مرکب ، زمان سنج الکترونیکی ، خط کش

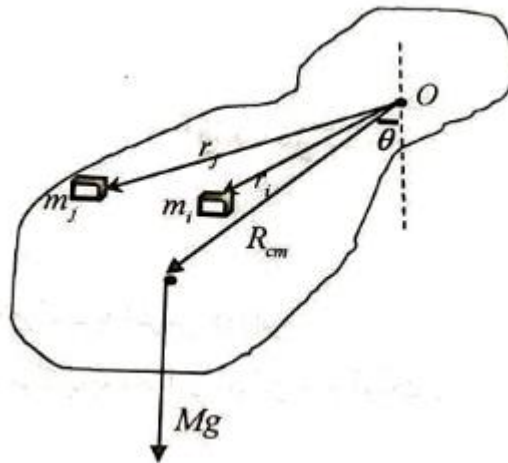
تئوری آزمایش

۱) آونگ مرکب آونگ مرکب جسم صلبی به جرم M است که می تواند در اثر نیروی گرانش ، حول محور افقی بدون اصطکاکی که از مرکز جرم آن نمی گذرد، نوسان کند . آونگ مرکب در شکل ۱ نشان داده شده است . هنگامی که آونگ به اندازه ی زاویه ی θ از حالت تعادل منحرف شود گشتاور نیروی بازگرداننده، آن را به وضعیت تعادل بر می گرداند. اما به علت انرژی جنبشی دوباره آونگ از وضعیت تعادل دور می شود و به این ترتیب حول محور افقی در یک صفحه ی قائم حرکت نوسانی پیدا می کند. صفحه ی قائم در برگیرنده ی مرکز جرم جسم C و نقطه ی آویز O است . فاصله ی مرکز جرم تا نقطه ی آویز را با R_{cm} نشان می دهیم .

آونگ مرکب را مجموعه ای از جرم های نقطه ای $m_1, m_2, \dots, m_n$ در نظر می گیریم که به ترتیب در فواصل $r_1, r_2, \dots, r_n$ از محور دوران قرار دارند .

جرم نقطه ای m_i را در نظر بگیرید که در فاصله ی r_i از نقطه ی آویز، قرار دارد. هنگامی که آونگ نوسان می کند این نقطه روی کمان دایره ای به شعاع r_i و مرکز O دوران می کند .

اگر جسم با سرعت زاویه ای ω دوران کند سرعت خطی جرم نقطه ای m_i برابر با $r_i \omega$ است و شتاب مماسی آن $r_i \alpha$ است که در آن $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ شتاب زاویه ای است.



شکل ۱

نیروی وارد بر هر جرم m_i شامل نیروهای خارجی (نیروی وزن) و نیروهای داخلی است که از طرف سایر اجرام m_j به جرم m_i وارد می شود. بر اساس قانون دوم نیوتن نیروی مماسی که به جرم وارد می شود برابر است با:

$$F_i = m_i a_i = m_i r_i \alpha \quad (۱)$$

گشتاور این نیرو حول محوری که از نقطه آویز می گذرد برابر است با:

$$\tau_i = |\vec{r}_i \times \vec{F}_i| = r_i F_i \quad (۲)$$

از آنجا که نیروهای داخلی بر اساس قانون سوم نیوتن مساوی و مختلف الجهتند این نیروها سهمی در گشتاور کل وارد بر جسم ندارند. بنابراین گشتاور نیروی وارد بر جسم تنها ناشی از نیروی وزن است و داریم

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \quad (۳)$$

با توجه به تعریف مرکز جرم یک جسم پیوسته داریم

$$MR_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (۴)$$

با جایگذاری رابطه ی فوق در رابطه ی ۳ داریم:

$$\tau = |\overrightarrow{MR_{cm}} \times \vec{g}| \quad (۵)$$

و یا

$$\tau = -MR_{cm} g \sin \theta \quad (۶)$$

گشتاور τ طوری بر آونگ اثر می کند که آونگ را به حالت تعادل اولیه ی خود برگرداند . علامت منفی در رابطه ای فوق به همین دلیل وارد شده است.

از سوی دیگر گشتاور کل وارد بر جسم را می توان از مجموع گشتاورهای رابطه ی ۲ به دست آورد .

$$\tau = \sum_i r_i F_i \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه ی ۱ در رابطه ی فوق خواهیم داشت :

$$\tau = \sum_i m_i r_i^2 \alpha \quad (8)$$

و یا

$$\tau = I \alpha \quad (9)$$

که در آن $I = \sum_i m_i r_i^2$ اینرسی دورانی جسم در حال نوسان است.

اینک برای یافتن معادله حالت آونگ مرکب از تساوی روابط ۶ و ۹ استفاده می کنیم.

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + MR_{cm} g \sin \theta = 0 \quad (10)$$

برای زوایای کوچک که در آن $\sin \theta \cong \theta$ است داریم :

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + MgR_{cm} \theta = 0 \quad (11)$$

و یا

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{MgR_{cm}}{I} \theta = 0 \quad (12)$$

این رابطه یک معادله دیفرانسیل خطی است که جواب آن برابر است با:

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (13)$$

در آن ω سرعت زاویه ای حرکت نوسانی است و برابر است با :

$$\omega^2 = \frac{MgR_{cm}}{I} \quad (14)$$

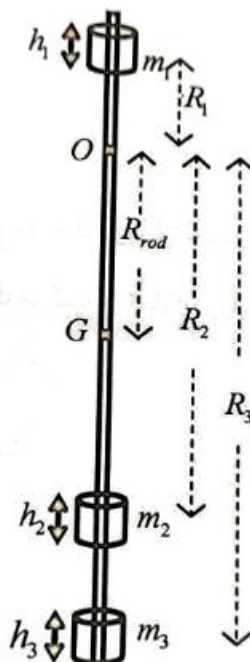
به این ترتیب ، دوره تناوب آونگ به صورت زیر به دست می آید:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgR_{cm}}} \quad (15)$$

وسایل آزمایش

آونگ مرکب

آونگ مرکب آزمایشگاه که در شکل ۲ نشان داده شده است شامل میله ای به جرم m_{rod} ، طول L_{rod} ، اینرسی دورانی I_{rod} و سه استوانه ی توپر به جرمهای m_1 و m_2 و m_3 و شعاع های r_1 و r_2 و r_3 و ارتفاع های h_1 و h_2 و h_3 است. اینرسی دورانی هر استوانه به ترتیب I_1 و I_2 و I_3 و فاصله ی مرکز جرم استوانه ها تا نقطه ی آویز به ترتیب R_1 و R_2 و R_3 است. مرکز جرم میله نیز به فاصله ی R از نقطه ی آویز قرار دارد با تغییر مکان استوانه ها می توان آونگ های مرکب متفاوتی ساخت.



شکل ۲

اینرسی دورانی آونگ مرکب نسبت به نقطه ی آویز برابر با مجموع اینرسی دورانی اجسام تشکیل دهنده ی آن است. یعنی

$$I = I_{rod} + I_1 + I_2 + I_3$$

اینرسی دورانی میله حول نقطه ی آویز از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$I = \frac{1}{12} m_{rod} L_{rod}^2 + m_{rod} R_{rod}^2 \quad (17)$$

اینرسی دورانی هر یک از استوانه ها نیز از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$I_i = \frac{1}{4} m_i r_i^2 + \frac{1}{12} m_i h_i^2 + m_i R_i^2 \quad (18)$$

به این ترتیب اینرسی دوراتی آونگ مرکب نسبت به نقطه ی آویز تعیین خواهد شد .

برای دو آونگ مرکب با اینرسی های دورانی متفاوت اما مرکز جرم ثابت ، با توجه به رابطه ی ۱۵ خواهیم داشت :

$$\frac{T_1^2}{I_1} = \frac{T_2^2}{I_2} = \frac{4\pi^2}{MgR_{cm}} \quad (19)$$

مکان مرکز جرم آونگ مرکب شکل ۲، از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$R_{cm} = \frac{m_1 R_1 + m_2 R_2 + m_3 R_3 + m_{rod} R_{rod}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_{rod}} \quad (20)$$

برای دو آونگ مرکب با مراکز جرم متفاوت اما اینرسی های دورانی یکسان ، با توجه به رابطه ی ۱۵ خواهیم داشت :

$$T_1^2 R_{cm1} = T_2^2 R_{cm2} = \frac{4\pi^2}{MgI} \quad (21)$$

روش آزمایش

بستگی زمان تناوب آونگ مرکب به اینرسی دورانی

آونگ مرکب که در شکل ۲ نشان داده شده است شامل میله ای به جرم ۵۱۶ گرم است . فاصله ی مرکز جرم میله از نقطه ی آویز ۹ سانتی متر است. بر روی میله، سه استوانه ی توپر قرار دارد . این استوانه ها می توانند در امتداد میله لغزانده شوند و یا با محکم کردن پیچ آنها در محل ثابت بمانند. فاصله ی استوانه ها را به ترتیب ۲۰ و ۱۰ و ۳۰ سانتی متر اختیار کنید . فاصله ی مرکز جرم آونگ را تا نقطه ی آویز به دست آورید و در جدول ۱ یادداشت کنید . همچنین اینرسی دورانی آونگ مرکب را از رابطه ی ۱۶ محاسبه نموده و در جدول ۱ یادداشت کنید . آونگ را کمی کوچکتر از زاویه ی ۶ درجه از حالت تعادل منحرف کرده و رها کنید . زمان ده نوسان را اندازه گیری کرده و در جدول ۱ بنویسید .

ازمایش	R_1	R_2	R_3	R_{CM}	I_{rod}	I_1	I_2	I_3	I	زمان ده نوسان	T	$\frac{T^2}{I}$
واحد	cm	cm	cm	cm	Kmg^2	Kmg^2	Kmg^2	Kmg^2	Kmg^2	S	S	$\frac{S^2}{Kgm^2}$
۱	20	10	30									
۲	10	15	25									
۳	20	10	20									

جدول ۱

سپس مطابق جدول ۱ آرایش دیگری از میله و استوانه را که در جدول ۱ داده شده است انتخاب کنید. در هر یک از این آرایشها مکان مرکز جرم آونگ را تا نقطه ی آویز محاسبه کنید و مطمئن شوید که مرکز جرم ثابت است. برای هر آرایش اینرسی دورانی کل آونگ را حساب کنید. آونگ را به نوسان در آورید و زمان ده نوسان را اندازه بگیرید و در جدول ۱ گزارش کار بنویسید.

(۲) بستگی زمان تناوب آونگ مرکب به فاصله ی مرکز جرم آونگ از نقطه ی آویز

در این آزمایش فاصله ی استوانه ها را تا نقطه ی آویز بر اساس هر یک از آرایش های داده شده در جدول ۲ اختیار کنید. برای هر آرایش، فاصله ی مرکز جرم آونگ را تا نقطه ی آویز به دست آورید و در جدول ۲ یادداشت کنید. همچنین اینرسی دورانی آونگ مرکب را از رابطه ی ۱۶ محاسبه نموده و مطمئن شوید که اینرسی دورانی ثابت است. آونگ را کمی کوچکتر از زاویه ی ۶ درجه از حالت تعادل منحرف کرده و رها کنید. زمان ده نوسان را اندازه گیری کرده و در جدول ۲ بنویسید.

ازمایش	R_1	R_2	R_3	R_{CM}	I_{rod}	I_1	I_2	I_3	I	زمان ده نوسان	T	$T^2 R_{CM}$
واحد	cm	cm	cm	cm	Kmg^2	Kmg^2	Kmg^2	Kmg^2	Kmg^2	S	S	mS^2
۱	10	20	30									
۲	20	10	30									

جدول ۲

محاسبات بررسی نتایج پرسشها

۱. در آزمایش اول ، نمودار مربع زمان تناوب را بر حسب اینرسی دورانی کل آونگ با استفاده از مقادیر جدول ۱ روی کاغذ میلیمتری رسم کرده و آن را ضمیمه ی گزارش کار نمایید .
۲. با استفاده از نمودار فوق شتاب جاذبه ی زمین را به دست آورده و آن را با شتاب گرانش واقعی همدان (۹,۷ متر بر مجذور ثانیه) مقایسه کنید .
۳. در آزمایش اول درصد خطای نسبی در محاسبه ی g را به دست آورید .
۴. آیا نسبت T^2/I مقدار ثابتی است ؟
۵. در آزمایش دوم ، نمودار مربع زمان تناوب را بر حسب عکس فاصله ی مرکز جرم تا نقطه ی آویز با استفاده از مقادیر جدول ۲ روی کاغذ میلیمتری رسم کرده و آن را ضمیمه ی گزارش کار نمایید .
۶. با استفاده از نمودار فوق شتاب جاذبه ی زمین را به دست آورده و با مقدار واقعی آن مقایسه کنید .
۷. در آزمایش دوم درصد خطای نسبی در محاسبه ی g را به دست آورید .
۸. در آزمایش دوم آیا $T^2 R_{cm}$ مقدار ثابتی است ؟

دانشگاه بوعلی سینا